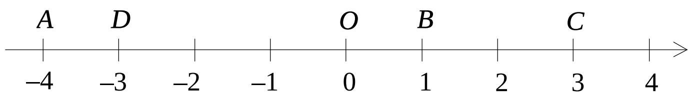
VALEUR ABSOLUE ET ENCADREMENTS

1. Distance entre deux nombres réels

<u>1.1. Définition</u> : On appelle **distance** ou **écart** entre 2 réels x et y, la distance sur la droite numérique entre les points d'abscisses x et y ; on la note $d(x\,;\,y)$.

<u>Exemples</u> :

Sur la droite réelle, on considère les points ci-dessous :



On a alors :

$d(0\,;\,–4) = OA = 4$ $\quad$ $d(–3\,;\,–4) = DA = 1$ $\quad$ $d(0\,;\,–3) = OD = 3$

$d(1\,;\,3) = BC = 2$ $\quad$ $d(0\,;\,3) = OC = 3$ $\quad$ $d(–3\,;\,3) = DC = 6$

<u>1.2. Cas particulier</u> :

La distance entre 0 et x est égale à : $\begin{cases} x \text{ si } x \text{ est positif} \\ -x \text{ si } x \text{ est negatif} \end{cases}$

Autrement dit : $\quad d(0\,;\,x) = \max(-x\,;\,x)$

De même, pour la distance entre deux réels x et y, on est amené à distinguer deux cas :

La distance entre x et y est égale à : $\begin{cases} y - x \text{ si } y \text{ est plus grand que } x \\ x - y \text{ si } x \text{ est plus grand que } y \end{cases}$

<u>Conclusion</u> : $d(x\,;\,y)$ est parmi les différences $y - x$ et $x - y$ celle qui est **positive.**

Autrement dit : $\quad d(x\,;\,y) = \max(y - x\,;\,x - y)$

<u>Remarque</u> : la notion de distance est symétrique : $d(x\,;\,y) = d(y\,;\,x)$.

2. Valeur absolue d'un nombre réel

<u>2.1. Définition</u> : On appelle valeur absolue d'un réel x la distance (ou l'écart) entre 0 et x. On la note $|x|$.

On a donc : $\quad |x| = d(x\,;\,0)$.

<u>2.2. Autres caractérisations</u> :

- $|x| = \max(-x\,;\,x)$.
- $|x| = x \times \text{sgn}(x)$ où sgn est la fonction "signe" définie par $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$.
- $|x| = \sqrt{x^2}$.

<u>Exercice</u> : écrire sans les valeurs absolues l'expression :

$$|x - 2| + |2x + 1|$$

(On pourra faire un tableau en distiguant les trois cas : $x \leqslant -\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2} < x \leqslant 2$ et $x > 2$)

2.3. Propriétés de la valeur absolue

	Langue française	Langage mathématique
P1	La valeur absolue d'une quantité A est un nombre positif	$\|A\| \geqslant 0$ pour tout $A \in \mathbb{R}$
P2	Une quantité A dont la valeur absolue est nulle est nulle.	$\|A\| = 0$ entraine $A = 0$
P3	Deux quantités dont les valeurs absolues sont égales sont soit égales soit opposées.	$\|A\| = \|B\|$ entraine $A = B$ ou $A = -B$
P4	La valeur absolue d'un produit est égale au produit des valeurs absolues.	$\|AB\| = \|A\|\,\|B\|$
P5	La valeur absolue d'un quotient est égale au quotient des valeurs absolues.	$\left\|\frac{A}{B}\right\| = \frac{\|A\|}{\|B\|}$ lorsque $B \neq 0$
P6	La valeur absolue d'une somme est inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues	$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$ (Inégalité triangulaire)

2.4. Théorème : Quels que soient les réels x et y, on a : $\boldsymbol{d(x\,;y) = |x - y|}$

2.5. Théorème : Si $A \leqslant B$ et $-A \leqslant B$ alors $|A| \leqslant B$ et réciproquement.

Variante : $\boldsymbol{-B \leqslant A \leqslant B \Leftrightarrow |A| \leqslant B}$

Exercices d'application des propriétés et des théorèmes :

Concerne	Résoudre les équations ci-dessous	Solution(s)
P2 et P3	$\|2x - 3\| = 0$ $\|3x + 4\| = \|2x + 6\|$ $\|x\| = 9$ $\|2 - x\| = -5$	
P4	$\|1 - x\|\,\|1 + x\| = 9$	
Théorème 2.4. ou P3	$\|x - 2\| = 5$ $\|x + 3\| = 4$	

Exercice sur l'inégalité triangulaire :

Démontrer que pour tous réels A et B, on a : $\big||A| - |B|\big| \leqslant |A - B|$

On a $|A| = |A - B + B| \leqslant |A - B| + |B|$ d'où : $|A| - |B| \leqslant |A - B|$

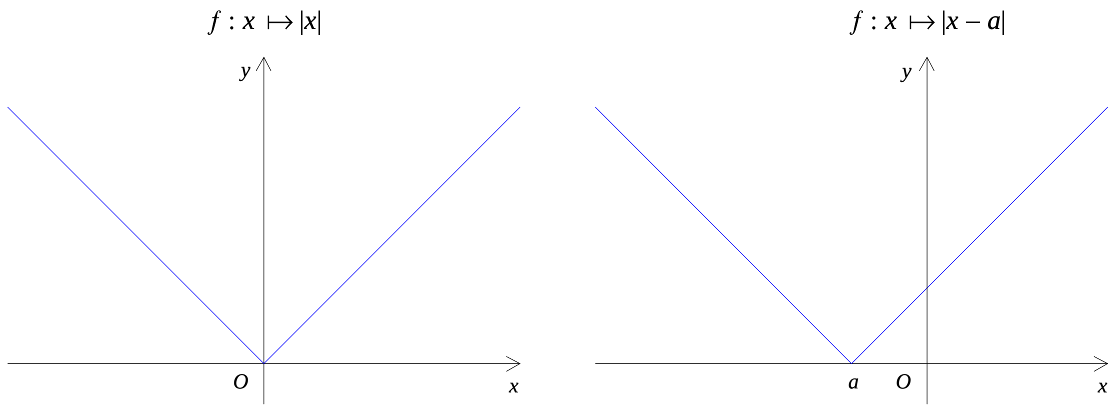
De même, $|B| = |B - A + A| \leqslant |B - A| + |A| = |A - B| + |A|$ d'où :

$$|B| - |A| \leqslant |A - B|$$

Et d'après le théorème 2.5. : $\big||A| - |B|\big| \leqslant |A - B|$

3. Représentation graphique des fonctions "valeur absolue"

Les représentations graphiques des fonctions de la forme $x \mapsto |x - a|$ ont la même allure en forme de "V".



4. Encadrements d'un nombre réel

4.1. Définition : Soit x un nombre réel. Réaliser un encadrement de x, c'est trouver deux nombres réels a et b tels que $a \leqslant x \leqslant b$. Le nombre $b - a$ s'appelle l'amplitude de l'encadrement.

Exemples :

Encadrement :	Amplitude :
$1 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 2$	1
$1{,}414 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1{,}415$	10^{-3}
$3{,}14 \leqslant \pi \leqslant 3{,}15$	10^{-2}

Exercice : Sachant que $|x - 3| < 2\times10^{-3}$, donner un encadrement de x : $2{,}998 < x < 3{,}002$

Comme le suggère cet exercice, on dit que 3 est une valeur approchée de x à 2×10^{-3} près.

On énonce, de façon plus générale la définition suivante :

4.2. Définition :

Lorsque $|x - a| \leqslant \varepsilon$, on dit que a est une valeur approchée de x à ε près.

Lorsque $a \leqslant x \leqslant a + \varepsilon$, on dit que a est une valeur approchée de x à ε près par défaut.

Lorsque $a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a$, on dit que a est une valeur approchée de x à ε près par excès.

Exemple : Ptolémée, mathématicien grec du II$^{\text{ème}}$ siècle, utilisait comme valeur approchée de $\sqrt{3}$ le nombre :

$$a = \frac{103}{60} + \frac{55}{60^2} + \frac{23}{60^3}$$

En utilisant la calculatrice, on obtient :

$$a \simeq 1{,}73205092593$$

Or $\sqrt{3} \simeq 1{,}73205080757$ donc a est une valeur approchée de par $\sqrt{3}$ excès.

Il y a 6 décimales exactes donc $\varepsilon = 10^{-6}$. (Et même $\varepsilon = 1{,}2\times10^{-7}$)

Exercice de synthèse : compléter le tableau suivant :

en termes de :			
valeur absolue	distance	intervalle	encadrement
$\lvert x-3\rvert \leqslant 1$			
	$d(x\,;-4) \leqslant 2$		
		$x \in [6\,;10]$	
			$-2 < x < 2$

Exercice sur les encadrements

Démontrer que : $-A \leqslant X \leqslant A \Leftrightarrow \lvert X\rvert \leqslant A$

On a : $-A \leqslant X \leqslant A \Leftrightarrow -A \leqslant X$ et $X \leqslant A \Leftrightarrow X \leqslant A$ et $-X \leqslant A \Leftrightarrow \lvert X\rvert \leqslant A$ (d'après le théorème 2.5.)

5. Centre et rayon d'un intervalle

Étant donné un intervalle $[a\,;b]$, son centre c et son rayon r sont donnés par les formules :

$$c = \frac{a+b}{2} \qquad r = \frac{b-a}{2}$$

Exercice : démontrer que $\max(a, b) = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{\lvert b-a\rvert}{2}$ et que $\min(a, b) = \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{\lvert b-a\rvert}{2}$.

Si $a \leqslant b$ alors $\max(a, b) = b$ et $\dfrac{a+b}{2} + \dfrac{\lvert b-a\rvert}{2} = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2} = b$

Si $a \geqslant b$ alors $\max(a, b) = a$ et $\dfrac{a+b}{2} + \dfrac{\lvert b-a\rvert}{2} = \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{b-a}{2} = a$

Dans tous les cas, on a bien : $\max(a, b) = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{\lvert b-a\rvert}{2}$.

On procède de même pour prouver l'égalité $\min(a, b) = \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{\lvert b-a\rvert}{2}$

On a donc prouvé : $\max(a, b) = c + \lvert r\rvert$ et $\min(a, b) = c - \lvert r\rvert$.

Remarque : en général, $a \leqslant b$ et $r \geqslant 0$...

6. Quelques démonstrations

Propriétés de la valeur absolue :

P1 : évident.

P2 : $\lvert A\rvert = 0 \Rightarrow A \times \operatorname{sgn}(A) = 0 \Rightarrow (A = 0 \text{ ou } \operatorname{sgn}(A) = 0) \Rightarrow A = 0$.

P3 : $\lvert A\rvert = \lvert B\rvert \Rightarrow A \times \operatorname{sgn}(A) = B \times \operatorname{sgn}(B) \Rightarrow (A = B \text{ ou } A = -B)$.

P4 : $\lvert AB\rvert = A \times B \times \operatorname{sgn}(AB) = A \times B \times \operatorname{sgn}(A) \times \operatorname{sgn}(B) = A \times \operatorname{sgn}(A) \times B \times \operatorname{sgn}(B) = \lvert A\rvert \times \lvert B\rvert$.

P5 : idem P4.

Théorème 2.4. : $(A \leqslant B \text{ et } -A \leqslant B) \Leftrightarrow \max(-A\,;A) \leqslant B \Leftrightarrow \lvert A\rvert \leqslant B$

Inégalité triangulaire : on distingue 4 cas

Cas 1 : $A \geqslant 0$ et $B \geqslant 0$: dans ce cas $A + B \geqslant 0$. On a donc : $|A + B| = A + B = |A| + |B|$

(On a égalité dans ce cas)

Cas 2 : $A \geqslant 0$ et $B \leqslant 0$: on a donc $A = |A|$ et $B = -|B|$.

Distinguons deux sous cas :

Sous cas 1 : $A + B \geqslant 0$: on a alors : $|A + B| = A + B = |A| - |B| \leqslant |A| \leqslant |A| + |B|$

Sous cas 2 : $A + B \leqslant 0$: on a alors : $|A + B| = -A - B = -|A| + |B| \leqslant |B| \leqslant |A| + |B|$

On a donc bien (dans tous les sous cas) : $|A + B| \leqslant |A| + |B|$

Cas 3 : $A \leqslant 0$ et $B \geqslant 0$: analogue au cas 2.

Cas 3 : $A \leqslant 0$ et $B \leqslant 0$: analogue au cas 1.

Autre méthode plus efficace : on compare $|A + B|^2$ et $(|A| + |B|)^2$:

$$(|A| + |B|)^2 = |A|^2 + 2|A||B| + |B|^2 = A^2 + 2|AB| + B^2$$

$$|A + B|^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Or on a toujours : $$AB \leqslant |AB|$$

D'où : $$0 \leqslant |A + B|^2 \leqslant (|A| + |B|)^2$$

Et par croissance de la fonction "racine carrée" (voir le cours sur les fonctions usuelles) :

$$|A + B| \leqslant |A| + |B|$$

Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire :

$$|A + B| = |A| + |B| \iff A \text{ et } B \text{ sont de même signe}$$

Pour le prouver :

1) Supposer $|A + B| = |A| + |B|$. En élevant au carré, démontrer que $AB = |AB|$. Conclure.
2) Supposer A et B sont de même signe. Alors il existe $\lambda \in [0 ; +\infty[$ tel que $B = \lambda A$. Exprimer alors $|A + B|$ en fonction de λ et de A. Faire de même pour $|A| + |B|$. Conclure.